1. V predajni stavebného materiálu v Starom Meste stojí 1 m^2 dlažby 260,- Sk. V podnikovej predajni vzdialenej 78 km od Starého Mesta poskytujú 15 %-nú zľavu z tejto ceny. Pri kúpe akého množstva dlažby sa oplatí ísť do podnikovej predajne, ak 1 km jazdy autom stojí 9,- Sk ? (V prípade nákupu v Starom Meste považujeme cenu dopravy za zanedbateľnú.)

(*3 body*)

Riešenie

Za m (m^2) dlažby zaplatíme v Starom Meste $260m$ (korún). Cena za to isté množstvo v podnikovej predajni je $(260 \cdot 0{,}85) \cdot m$ (korún), k tejto sume ešte musíme prirátať náklady na cestu, ktoré sú $2 \cdot 78 \cdot 9 = 1\,404$ (korún). Celkové náklady na nákup m (m^2) dlažby v podnikovej predajni sú teda

$$(260 \cdot 0{,}85) \cdot m + 1\,404 = 221m + 1\,404 \text{ (korún).} \tag{1}$$

Nákup v podnikovej predajni sa oplatí, ak

$$221m + 1\,404 < 260\,m\,. \tag{2}$$

Riešením tejto nerovnice dostávame

$$1\,404 < 39m\,, \tag{3}$$

$$36 < m\,.$$

Do podnikovej predajne sa oplatí ísť pri kúpe viac ako 36 m^2 dlažby.

Poznámky.

1. Nerovnicu (3) môžeme získať bezprostredne (teda bez predchádzajúceho odvodenia nerovnice (2)) touto úvahou: nákup v podnikovej predajni bude výhodnejší, ak náklady na dopravu – tj. $2 \cdot 78 \cdot 9 = 1\,404$ (korún) – budú menšie ako úspora získaná nižšou cenou dlažby. Táto úspora sa pri nákupe m (m^2) dlažby rovná

$$(260 \cdot 0{,}15) \cdot m = 39m \text{ (korún).}$$

To znamená, že nákup v podnikovej predajni bude výhodnejší, ak

$$1\,404 < 39m\,.$$

2. Niektorí žiaci pravdepodobne zabudnú pri výpočte nákladov na cestu vynásobiť vzdialenosť 78 km dvomi. Namiesto (1) tak dostanú

$$(260 \cdot 0{,}85) \cdot m + 702 = 221m + 702$$

a namiesto nerovnice (2), resp. (3) nerovnicu

$$221m + 702 < 260\,m\,, \tag{4}$$

resp.

$$702 < 39m\,, \tag{5}$$

ktorej riešením je

$$18 < m\,.$$

Hodnotenie
(3 body)

- ak žiak uviedol nerovnicu (2) alebo (3) **2 body**
  tieto 2 body prideľte aj v prípade, že žiak v nerovnici uvádza namiesto ostrej nerovnosti neostrú
  - ak žiak namiesto (2), resp. (3) uviedol nerovnicu (4), resp. (5) (s ostrou alebo neostrou nerovnosťou), považujte to za numerickú chybu[1] a prideľte z týchto 2 bodov **1,5 bodu**
  - ak žiak neuviedol žiadnu z nerovníc (2), (3), (4), (5), ale vyjadril správne cenu v podnikovej predajni, resp. rozdiel medzi cenou v podnikovej predajni a predajni v meste, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za správne riešenie nerovnice (2) alebo (3) **1 bod**

[1] postupujte teda podľa 3. odrážky zo všeobecných pokynov

2. Nájdite také $m \in R$, aby rovnica $mx^2 + (2m+3)x + m + \frac{3}{4} = 0$ mala práve jeden koreň.

(*4 body*)

Riešenie

Pri riešení musíme rozlíšiť dva prípady :

- Pre $m \neq 0$ je daná rovnica kvadratická, preto má jeden koreň práve vtedy, keď jej diskriminant $$D = (2m+3)^2 - 4 \cdot m \cdot \left(m + \frac{3}{4} \right)$$

  je rovný nule. Riešením rovnice $D = 0$, tj.
  $$(2m+3)^2 - 4 \cdot m \cdot \left(m + \frac{3}{4} \right) = 0 \tag{1}$$
  dostávame
  $$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 3m = 0,$$
  $$9m + 9 = 0,$$
  $$m = -1.$$
  Nájdené m je rôzne od nuly, preto je riešením našej úlohy.
- Pre $m = 0$ je daná rovnica lineárna a má tvar
  $$3x + \frac{3}{4} = 0 \ . \tag{2}$$
  Rovnica (2) má jediné riešenie (je ním číslo $x = -\frac{1}{4}$), preto $m = 0$ je tiež riešením našej úlohy.

Daná rovnica má práve jeden koreň pre $m = 0$ a $m = -1$.

Poznámka. Rovnicu (1) možno dostať aj touto úvahou: Pre $m \neq 0$ (a $D \geq 0$) má daná rovnica korene $x_{1,2} = \frac{-(2m+3) \pm \sqrt{D}}{2m}$. Práve 1 koreň má vtedy, keď $x_1 = x_2$, t.j.
$$\frac{-(2m+3) + \sqrt{D}}{2m} = \frac{-(2m+3) - \sqrt{D}}{2m}, \tag{3}$$
odtiaľ $\sqrt{D} = 0$, t.j.
$$\sqrt{(2m+3)^2 - 4 \cdot m \cdot \left(m + \frac{3}{4} \right)} = 0 \, . \tag{4}$$

Hodnotenie

(4 body)

- ak žiak uviedol riešenie $m = 0$ — **1 bod**
- ak žiak uviedol rovnicu (1) alebo (4) — **2 body**
  - ak žiak neuviedol rovnicu (1) ani (4), ale uviedol podmienku $D = 0$ (*v ktorej diskriminant nevyjadril pomocou m*) alebo rovnicu (3), prideľte z týchto 2 bodov — **1 bod**
- za riešenie $m = -1$ získané riešením rovnice (1) — **1 bod**

3. Dané sú body $A[2; 1]$, $B[0; 7]$, $C[3; 2]$. Vypočítajte súradnice priesečníka výšok trojuholníka ABC.

(*4 body*)

Riešenie

Priamka v_c, na ktorej leží výška na stranu AB trojuholníka ABC, má rovnicu

$$v_c : x - 3y + 3 = 0\,, \qquad (1)$$

ktorú môžeme nájsť napr. nasledovne:
Vektor $B - A = (-2, 6)$ je normálový vektor priamky v_c, preto jej rovnica má tvar

$$v_c : -2x + 6y + c = 0\,.$$

Ak do tejto rovnice dosadíme súradnice bodu C, ktorý leží na priamke v_c, dostaneme

$$-6 + 12 + c = 0\,, \quad \text{odtiaľ} \quad c = -6\,.$$

Rovnica priamky v_c je teda $v_c : -2x + 6y - 6 = 0$, tj. $x - 3y + 3 = 0$.

Rovnakým postupom nájdeme rovnicu niektorej zo zvyšných dvoch výšok trojuholníka ABC, napr. výška na stranu AC leží na priamke

$$v_b : x + y - 7 = 0\,. \qquad (2)$$

Súradnice priesečníka výšok trojuholníka sú riešením sústavy (1), (2), tj.

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ x + \;\; y &= 7 \end{aligned}\,. \qquad (3)$$

Riešením tejto sústavy dostávame

$$x = 4{,}5\,, \quad y = 2{,}5\,.$$

Priesečník výšok trojuholníka *ABC* je bod $[4{,}5\,; 2{,}5]$.

Poznámky.

1. Pri hľadaní rovnice priamky v_c sme mohli použiť aj niektorý z nasledujúcich postupov:

- Priamka AB má smernicu $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-1}{0-2} = -3$. Súčin smerníc navzájom kolmých priamok sa rovná -1, preto smernica priamky v_c je $\dfrac{1}{3}$. Rovnica priamky v_c má preto tvar
$$y = \frac{1}{3}x + d\,. \qquad (4)$$
Do (4) teraz dosadíme súradnice bodu C, ktorý leží na priamke v_c:
$$2 = \frac{1}{3} \cdot 3 + d\,, \text{ odtiaľ } d = 1\,.$$
Priamka v_c má teda rovnicu $\quad v_c : y = \dfrac{1}{3}x + 1\,.$
- Priamka v_c je kolmá na vektor $B - A = (-2, 6)$, preto jeden z jej smerových vektorov je $\mathbf{s} = (6, 2)$. Parametrická rovnica priamky v_c je potom $X = C + t \cdot \mathbf{s}$, tj.
$$\begin{aligned} v_c : x &= 3 + 6t \\ y &= 2 + 2t \end{aligned}\,, \qquad (5)$$

kde t je reálny parameter.
Z parametrickej rovnice (5) získame rovnicu v neparametrickom tvare, ak napr. od prvej rovnice odčítame trojnásobok druhej rovnice:

$$x-3y=(3+6t)-3(2+2t)=-3\text{, teda}\quad x-3y=-3.$$

2. Namiesto neparametrických rovníc (1), (2) sme mohli použiť rovnice priamok v_c, v_b v parametrickom tvare. Parametrické rovnice priamky v_c sme odvodili v (5) :

$$v_c: \begin{aligned} x &= 3+6t \\ y &= 2+2t \end{aligned},$$

(t je reálny parameter).
Jedno z parametrických vyjadrení priamky v_b je $v_b: X=B+s\cdot(1,-1)$, tj.

$$v_b: \begin{aligned} x &= s \\ y &= 7-s \end{aligned}, \qquad (6)$$

kde s je reálny parameter.
Súradnice priesečníka výšok dostaneme dosadením vhodného t do rovníc (5) aj dosadením vhodného s do rovníc (6), tieto parametre t a s sú riešením sústavy

$$\begin{aligned} 3+6t &= s \\ 2+2t &= 7-s \end{aligned} \qquad (7)$$

(na ľavej strane sú parametrické vyjadrenia priamky v_c, na pravej strane parametrické vyjadrenia priamky v_b).
Sčítaním prvej a druhej rovnice sústavy (7) dostaneme

$$5+8t=7\text{, odtiaľ}\quad t=0{,}25.$$

Dosadením tohto t do (5) dostaneme hľadané súradnice priesečníka výšok:

$$\begin{aligned} x &= 3+6\cdot 0{,}25 = 4{,}5 \\ y &= 2+2\cdot 0{,}25 = 2{,}5 \end{aligned}.$$

3. Namiesto ľubovoľnej z priamok v_c, v_b sme mohli pri hľadaní priesečníka uvažovať priamku v_a, na ktorej leží výška na stranu BC. Táto priamka má rovnicu

$$v_a: 3x-5y-1=0,$$

jedným z jej parametrických vyjadrení je $v_a: X=A+r\cdot(5,3)$, tj.

$$v_a: \begin{aligned} x &= 2+5r \\ y &= 1+3r \end{aligned},$$

kde r je reálny parameter.

Hodnotenie
(4 body)

- ak žiak našiel rovnice dvoch priamok, na ktorých ležia výšky trojuholníka *ABC* **3 body**
  - ak žiak našiel rovnicu len jednej takej priamky, prideľte z týchto 3 bodov **2 body**
  - ak žiak nenašiel rovnicu ani jednej takej priamky, ale našiel jej smernicu alebo smerový vektor, prideľte z týchto 3 bodov **1 bod**
- za správnym postupom nájdené súradnice priesečníka výšok **1 bod**

4. Nájdite také cifry x a y, aby šesťciferné číslo $32x54y$ bolo deliteľné 36. (*4 body*)

Riešenie I (použitím ekvivalentných podmienok)

Číslo je deliteľné 36 práve vtedy, keď je súčasne deliteľné 9 aj 4. Dané číslo $32x54y$ bude

- deliteľné 4 práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslie (tj. $4y$) bude deliteľné 4. Z tejto úvahy vyplýva, že y môže byť len niektorá z číslic 0, 4, 8 :
$$y \in \{0, 4, 8\}. \tag{1}$$
- deliteľné 9 práve vtedy, keď jeho ciferný súčet
$$3+2+x+5+4+y=14+x+y$$
bude deliteľný 9, teda ak $x+y$ bude niektoré z čísel 4, 13 :
$$x+y \in \{4, 13\} \tag{2}$$
(súčet $x+y$ nemôže byť väčší ako 18, pretože x aj y môžu byť nanajvýš 9).

Číslo $32x54y$ je teda deliteľné 36 práve vtedy, keď súčasne platí (1) a (2). Obidve podmienky sú splnené len v nasledujúcich 4 prípadoch :
$$x=4\ ,\ y=0\ ;\qquad x=0\ ,\ y=4\ ;$$
$$x=9\ ,\ y=4\ ;\qquad x=5\ ,\ y=8\ .$$

Číslo deliteľné 36 dostaneme len v týchto 4 prípadoch: 324540 (tj. $x=4$, $y=0$), 320544 ($x=0$, $y=4$), 329544 ($x=9$, $y=4$), 325548 ($x=5$, $y=8$).

Riešenie II (použitím postačujúcich podmienok)

Ak je číslo $32x54y$ deliteľné 36, je iste aj deliteľné 6, teda súčasne deliteľné 2 aj 3. Preto

- jeho ciferný súčet
$$3+2+x+5+4+y=14+x+y$$
musí byť deliteľný 3, teda $x+y$ môže byť len niektoré z čísel 1, 4, 7, 10, 13, 16 (väčšie čísla už neprichádzajú do úvahy, pretože súčet $x+y$ nemôže byť väčší ako 18, keďže x aj y môžu nadobúdať nanajvýš hodnotu 9) :
$$x+y \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}. \tag{3}$$
- $32x54y$ musí byť párne číslo, teda y musí byť párne :
$$y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}. \tag{4}$$

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené všetky dvojice $[x, y]$ cifier, ktoré spĺňajú súčasne podmienky (3) a (4); riešením našej úlohy môže byť len niektorá z týchto dvojíc.

x	y	hodnota podielu $\frac{32x54y}{36}$	x	y	hodnota podielu $\frac{32x54y}{36}$
1	0	321540 : 36 ≅ 8931,67	6	4	326544 : 36 ≅ 9070,67
4	**0**	**324540 : 36 = 9015**	**9**	**4**	**329544 : 36 = 9154**
7	0	327540 : 36 ≅ 9098,33	1	6	321546 : 36 ≅ 8931,83
2	2	322542 : 36 = 8959,5	4	6	324546 : 36 ≅ 9015,167
5	2	325542 : 36 ≅ 9042,83	7	6	327546 : 36 = 9098,5
8	2	328542 : 36 ≅ 9126,167	2	8	322548 : 36 ≅ 8959,67
0	**4**	**320544 : 36 = 8904**	**5**	**8**	**325548 : 36 = 9043**
3	4	323544 : 36 ≅ 8987,33	8	8	328548 : 36 ≅ 9126,33

Ak pre každú z takto nájdených dvojíc $[x\,,y]$ vypočítame na kalkulačke hodnotu podielu $\frac{32x54y}{36}$ (vypočítané hodnoty sú uvedené v tabuľke), zistíme, že len v 4 prípadoch je podiel celé číslo. Teda len v týchto 4 prípadoch je číslo $32x54y$ je deliteľné 36 (tieto priaznivé prípady sú v tabuľke zvýraznené).

Číslo deliteľné 36 dostaneme len v týchto 4 prípadoch: 324540 (tj. $x=4$, $y=0$), 320544 ($x=0$, $y=4$), 329544 ($x=9$, $y=4$), 325548 ($x=5$, $y=8$).

Poznámka. Namiesto deliteľnosti 6 môže žiak zvoliť niektorú inú postačujúcu podmienku pre deliteľnosť číslom 36, napr.

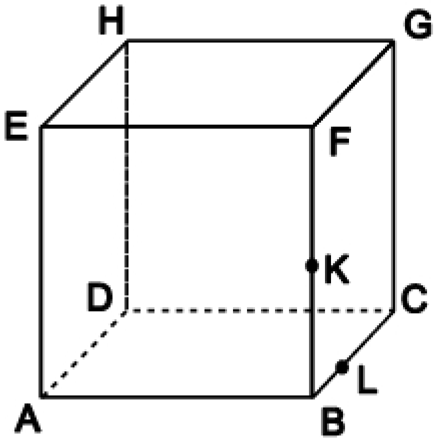
- deliteľnosť 9, v takom prípade by musel preveriť všetky dvojice $[x\,,y]$ spĺňajúce podmienku (2), tj. $x+y\in\{4,13\}$, teda dvojice
  $$[0\,,4],\ [1\,,3],\ [2\,,2],\ [3\,,1],\ [4\,,0],\ [4\,,9],\ [5\,,8],\ [6\,,7],\ [7\,,6],\ [8\,,5],\ [9\,,4]\ ;$$
- deliteľnosť 4, v takom prípade by musel preveriť všetky dvojice $[x\,,y]$ spĺňajúce podmienku (1), tj. $y\in\{0,4,8\}$, teda 30 dvojíc
  $$[0\,,0],\ [1\,,0],\ [2\,,0],\ [3\,,0],\ \ldots,\ [9\,,0],$$
  $$[0\,,4],\ [1\,,4],\ [2\,,4],\ [3\,,4],\ \ldots,\ [9\,,4],$$
  $$[0\,,8],\ [1\,,8],\ [2\,,8],\ [3\,,8],\ \ldots,\ [9\,,8].$$

V extrémnom prípade sa žiak môže pokúsiť preveriť deliteľnosť 36-imi pre všetkých 100 prvkov množiny $\{[x\,,y];\,x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$.

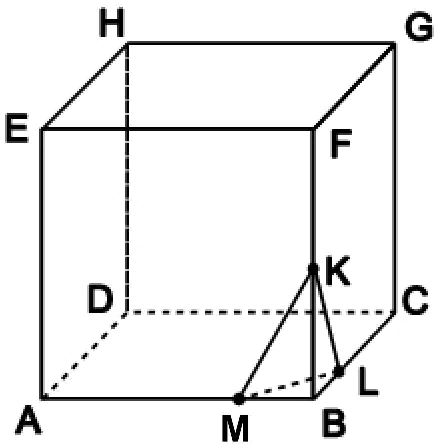
Hodnotenie
(4 body)

- za každé zo 4 riešení úlohy **po 0,5 boda**
- ak žiak použil postup, ktorý umožňuje nájdenie všetkých riešení **2 body**
  (*napr. žiak uviedol podmienky (1) a (2) alebo uviedol niektorú postačujúcu podmienku a z jeho postupu je zrejmé, že preveroval všetky dvojice cifier vyhovujúce tejto podmienke, alebo preveril* <u>*všetkých 100*</u> *prvkov množiny* $\{[x\,,y];\,x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$)
  - ak žiak uviedol niektorú postačujúcu podmienku pre deliteľnosť 36-imi, ale z jeho postupu <u>nie je</u> zrejmé, že preveroval všetky dvojice cifier vyhovujúce tejto podmienke, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
  - ak žiak nepreveril deliteľnosť 36-imi pre všetkých 100 prvkov množiny $\{[x\,,y];\,x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$, ale z jeho postupu je zrejmé, že pri tomto preverovaní zvolil nejaký systém (*teda nepreveroval len náhodne zvolené dvojice cifier x, y*), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**

5a) Je daná kocka $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky 4. Nech bod K je stred hrany BF a bod L nech leží vnútri hrany BC tak, že $|BL| = 1$. Do obrázka v zadaní narysujte rez kocky rovinou β, ktorá obsahuje body K, L a je rovnobežná s priamkou EG. Vypočítajte aj plošný obsah tohto rezu. (*5 bodov*)



Riešenie



Rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou β je rovnoramenný trojuholník KLM (rovnosť $|KM| = |KL|$ vyplýva napr. z podobnosti trojuholníkov MLB a EGF).

Plošný obsah tohto trojuholníka môžeme vypočítať viacerými spôsobmi:

- (*použitím Heronovho vzorca*)
  Z pravouhlého trojuholníka KBL dostávame použitím Pytagorovej vety
  $$|KL| = \sqrt{|KB|^2 + |BL|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,; \qquad (1)$$
  podobne z pravouhlého trojuholníka MBL máme
  $$|ML| = \sqrt{|MB|^2 + |BL|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$
  Podľa Heronovho vzorca
  $$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
  je potom obsah trojuholníka KLM

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2\cdot\left[\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\right]}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{20-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{18}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2\cdot 9}=\frac{3}{2}.$$

- (*výpočtom výšky na stranu ML*)
  V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku MBL označme K' stred strany ML. Potom
  $$|ML|=\sqrt{|MB|^2+|BL|^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
  a
  $$|BK'|=\sqrt{|MB|^2-\left(\frac{|ML|}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$
  V trojuholníku KLM je úsečka $K'K$ výškou na stranu LM, jej veľkosť vypočítame z pravouhlého trojuholníka $BK'K$:
  $$|KK'|=\sqrt{|BK'|^2+|BK|^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+4}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$
  Plošný obsah trojuholníka KLM potom je
  $$P=\frac{1}{2}|ML|\cdot|KK'|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\ .$$
- (*analyticky*)
  Zvoľme v priestore súradnicovú sústavu; napríklad tak, aby platilo $B[0,0,0]$, $A[-4,0,0]$, $C[0,4,0]$, $F[0,0,4]$. Potom body M, L, K majú súradnice $M[-1,0,0]$, $L[0,1,0]$, $K[0,0,2]$. Obsah trojuholníka KLM môžeme vypočítať pomocou vzorca
  $$P=\frac{1}{2}|KL|\cdot|KM|\cdot\sin(\angle LKM)=\frac{1}{2}|KL|^2\cdot\sin(\angle LKM), \tag{2}$$
  veľkosti $|KL|$ a $\sin(\angle LKM)$ môžeme pritom vypočítať nasledovne:
  - $|KL|$ ako vzdialenosť bodov $K[0,0,2]$ a $L[0,1,0]$:
    $$|KL|=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}\ ; \tag{3}$$
  - $\sin(\angle LKM)$ pomocou kosínusu, ten nájdeme pomocou skalárneho súčinu vektorov $L-K=(0,1,-2)$ a $M-K=(-1,0,-2)$:
    $$\cos(\angle LKM)=\frac{(L-K)\cdot(M-K)}{|L-K|\cdot|M-K|}=\frac{(0,1,-2)\cdot(-1,0,-2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\ ,$$
    odtiaľ
    $$\sin(\angle LKM)=\sqrt{1-\cos^2(\angle LKM)}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}\ . \tag{4}$$

  Dosadením (3) a (4) do (2) dostaneme
  $$P=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{2}\ .$$

Rezom je rovnoramenný trojuholník *KLM* (pozri obrázok), plošný obsah rezu je $\frac{3}{2}$.

Poznámka. Plochu trojuholníka *KLM* je možné nájsť aj pomocou vektorového súčinu vektorov $L-K=(0,1,-2)$ a $M-K=(-1,0,-2)$:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|(L-K)\times(M-K)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}\right|=$$

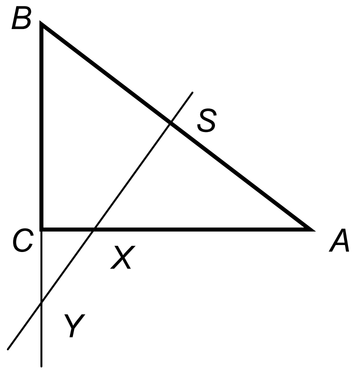
$$=\frac{1}{2}\cdot\left|(-2,2,1)\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\frac{3}{2}.$$

Hodnotenie
(5 bodov)

- za správne narysovaný rez — **1,5 boda**
- za výpočet veľkosti niektorého prvku (*strana, výška, uhol alebo niektorá trigonometrická funkcia uhla, súradnice niektorého z vektorov L-K, M-K, L-M*) trojuholníka *KLM* — **1 bod**
- ak žiak uviedol správny vzorec na výpočet obsahu trojuholníka *KLM tento 1 bod prideľte* ***len vtedy****, keď žiak súčasne vypočítal veľkosť niektorého prvku trojuholníka KLM vyskytujúceho sa v tomto vzorci* — **1 bod**
- za výpočet veľkosti ďalšieho prvku trojuholníka *KLM* vyskytujúceho sa v žiakom uvedenom vzorci na výpočet obsahu tohto trojuholníka — **0,5 boda**
- za správne vypočítaný obsah trojuholníka *KLM* — **1 bod**
  - ak žiak postupoval pri výpočte správne, ale v dôsledku zaokrúhľovania nedostal presný výsledok $\frac{3}{2}$, prideľte z tohto 1 boda **0,5 boda**

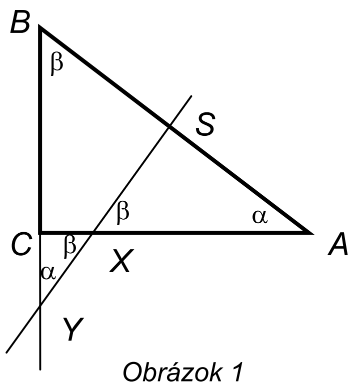
5b) V pravouhlom trojuholníku ABC ($|AC| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm a uhol ACB je $90°$) je zostrojená kolmica na preponu AB prechádzajúca jej stredom S. Táto kolmica pretína odvesnu AC v bode X a priamku BC v bode Y. Vypočítajte veľkosť úsečky XY.

(*5 bodov*)



Poznámka: Tento príklad je možné riešiť napríklad využitím podobnosti alebo pomocou analytickej geometrie.

Riešenie I (podobnosťou)



Obrázok 1

Pravouhlé trojuholníky ABC, YBS, AXS a YXC sú podobné (majú totiž rovnaké uhly pri sebezodpovedajúcich vrcholoch, pozri obr. 1). Z podobnosti prvých troch uvedených trojuholníkov vyplýva

$$|AB| : |AC| : |BC| = |YB| : |YS| : |BS| = |AX| : |AS| : |XS| .$$

Ak do tejto rovnosti dosadíme známe veľkosti strán, tj.

$$|AC| = 8 ,\ |BC| = 6 ,\ |AB| = 10 ,\ |AS| = |BS| = 5$$

(dĺžku AB sme vypočítali pomocou Pytagorovej vety, $|AS|$ aj $|BS|$ je podľa zadania polovica z $|AB|$), dostaneme

$$10 : 8 : 6 = |YB| : |YS| : 5 = |AX| : 5 : |XS| . \qquad (1)$$

Na výpočet $|XY|$ si môžeme vybrať niektorý z nasledujúcich postupov:

a) *$|XY|$ vypočítame ako rozdiel $|XY| = |YS| - |XS|$, pritom $|YS|$ vypočítame na základe podobnosti trojuholníkov ABC a BSY a $|XS|$ na základe podobnosti trojuholníkov ABC a AXS*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka YBS sú $\frac{5}{6}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka ABC, preto

$$|YS| = \frac{5}{6} \cdot 8 = \frac{20}{3} . \qquad (2)$$

Rovnako z uvedeného pomeru vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka AXS sú $\frac{5}{8}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka ABC, preto

$$|XS| = \frac{5}{8} \cdot 6 = \frac{15}{4} . \qquad (3)$$

Potom $$|XY| = |YS| - |XS| = \frac{20}{3} - \frac{15}{4} = \frac{35}{12}\ .$$

b) *najprv vypočítame dĺžku $|CX|$ ako rozdiel $|CX| = |AC| - |AX|$, pritom $|AX|$ vypočítame na základe podobnosti trojuholníkov ABC a AXS, potom vypočítame $|XY|$ na základe podobnosti trojuholníka YXC s niektorým z trojuholníkov ABC, YBS, AXS*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *AXS* sú $\frac{5}{8}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|AX| = \frac{5}{8} \cdot 10 = \frac{25}{4}\ . \tag{4}$$

Potom $$|CX| = |AC| - |AX| = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}.$$

Z podobnosti trojuholníkov *YXC* a *ABC* vyplýva

$$\frac{|XY|}{|CX|} = \frac{|BA|}{|CB|},\ \text{tj.}\ \frac{|XY|}{\frac{7}{4}} = \frac{10}{6}\ , \tag{5}$$

odtiaľ $$|XY| = \frac{7}{4} \cdot \frac{10}{6} = \frac{35}{12}.$$

c) *najprv vypočítame dĺžku $|CY|$ ako rozdiel $|CY| = |YB| - |BC|$, pritom $|YB|$ vypočítame na základe podobnosti trojuholníkov ABC a YBS, potom vypočítame $|XY|$ na základe podobnosti trojuholníka YXC s niektorým z trojuholníkov ABC, YBS, AXS*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *YBS* sú $\frac{5}{6}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|YB| = \frac{5}{6} \cdot 10 = \frac{25}{3}\ . \tag{6}$$

Potom $$|CY| = |YB| - |BC| = \frac{25}{3} - 6 = \frac{7}{3}.$$

Z podobnosti trojuholníkov *YXC* a *ABC* vyplýva

$$\frac{|XY|}{|CY|} = \frac{|BA|}{|CA|},\ \text{tj.}\ \frac{|XY|}{\frac{7}{3}} = \frac{10}{8}\ , \tag{7}$$

odtiaľ $$|XY| = \frac{7}{3} \cdot \frac{10}{8} = \frac{35}{12}.$$

d) *$|XY|$ vypočítame na základe Pytagorovej vety ako $|XY| = \sqrt{|CY|^2 + |CX|^2}$, pritom $|CX|$ vypočítame ako rozdiel $|CX| = |AC| - |AX|$ ($|AX|$ nájdeme na základe podobnosti trojuholníkov ABC a AXS) a $|CY|$ vypočítame ako rozdiel $|CY| = |YB| - |BC|$ ($|YB|$ nájdeme na základe podobnosti trojuholníkov ABC a YBS).*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *YBS* sú $\frac{5}{6}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|YB| = \frac{5}{6} \cdot 10 = \frac{25}{3},$$

odtiaľ $$|CY| = |YB| - |BC| = \frac{25}{3} - 6 = \frac{7}{3}.$$

Rovnako z uvedeného pomeru vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka AXS sú $\frac{5}{8}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka ABC, preto

$$|AX| = \frac{5}{8} \cdot 10 = \frac{25}{4},$$

odtiaľ $$|CX| = |AC| - |AX| = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}.$$

Potom $$|XY| = \sqrt{|CY|^2 + |CX|^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{35}{12}.$$

Veľkosť úsečky *XY* je $\frac{35}{12}$ (cm).

Poznámka. Rovnosti (2) až (7) môžeme vyjadriť aj použitím goniometrických funkcií[2]. Označme $\alpha = \angle BAC$ (pozri obrázok 1), z pravouhlého trojuholníka ABC máme :

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{6}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{8}{10}, \quad \tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{6}{8}.$$

Potom

- v pravouhlom trojuholníku YBS platí $\tan\alpha = \frac{|BS|}{|YS|}$, $\sin\alpha = \frac{|BS|}{|YB|}$, preto

$$|YS| = \frac{|BS|}{\tan\alpha} = \frac{5}{\frac{6}{8}} = \frac{20}{3}, \quad |YB| = \frac{|BS|}{\sin\alpha} = \frac{5}{\frac{6}{10}} = \frac{25}{3},$$

  čo sú rovnosti (2) a (6);
- v pravouhlom trojuholníku AXS platí $\tan\alpha = \frac{|XS|}{|AS|}$, $\cos\alpha = \frac{|AS|}{|AX|}$, preto

$$|XS| = |AS| \cdot \tan\alpha = 5 \cdot \frac{6}{8} = \frac{15}{4}, \quad |AX| = \frac{|AS|}{\cos\alpha} = \frac{5}{\frac{8}{10}} = \frac{25}{4},$$

  čo sú rovnosti (3) a (4);
- v pravouhlom trojuholníku YXC platí

$$\sin\alpha = \frac{|CX|}{|XY|} = \frac{6}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{|CY|}{|XY|} = \frac{8}{10},$$

  čo sú vlastne rovnosti (5) a (7).

[2] Namiesto označenia tg používame označenie tan

Pomocou trigonometrických funkcií by sme teda napr. výpočet z riešenia Ia) mohli zapísať takto:

$$|XY| = |YS| - |XS| = \frac{|BS|}{\tan\alpha} - |AS| \cdot \tan\alpha = \frac{5}{\frac{6}{8}} - 5 \cdot \frac{6}{8} = \frac{20}{3} - \frac{15}{4} = \frac{35}{12}\ .$$

Riešenie II (analyticky)

Zvoľme v rovine súradnicovú sústavu, napr. tak, aby os x bola priamka CA a os y priamka CB. Body A, B, C budú mať súradnice $A[8,0]$, $B[0,6]$, $C[0,0]$.

Potom súradnice bodu $S = \dfrac{A+B}{2}$ budú $S[4,3]$ a rovnica priamky p prechádzajúcej bodom S kolmo na AB bude mať tvar

$$p: -4x + 3y + 7 = 0$$

(vektor $B - A = (-8,6)$ je normálový vektor priamky p, preto jej rovnica má tvar $-8x + 6y + c = 0$, dosadením súradníc bodu S do tejto rovnice dostávame $c = 14$).

Bod X je priesečník priamky p s osou x, jeho x-ovú súradnicu preto dostaneme dosadením $y = 0$ do rovnice priamky p :

$$-4x + 7 = 0\,,\ \text{odtiaľ}\ \ x = \frac{7}{4},$$

teda

$$X\left[\frac{7}{4}, 0\right].$$

Bod Y je priesečník priamky p s osou y, jeho y-ovú súradnicu dostaneme dosadením $x = 0$ do rovnice priamky p :

$$3y + 7 = 0\,,\ \text{odtiaľ}\ \ y = -\frac{7}{3},$$

teda

$$Y\left[0, -\frac{7}{3}\right].$$

Hľadaná dĺžka úsečky XY je potom

$$|XY| = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{35}{12}.$$

Veľkosť úsečky XY je $\frac{35}{12}$ (cm).

Hodnotenie
(5 bodov)

Riešenie I

- ak žiak v svojom riešení skonštatoval podobnosť aspoň 2 z trojuholníkov ABC, YBS, AXS a YXC . **2 body**
  tieto 2 body prideľte, ak žiak buď v svojom riešení napíše, že niektoré z uvedených trojuholníkov sú podobné, alebo ak je z jeho postupu alebo zápisu zrejmé, že si uvedenú podobnosť uvedomuje
- ak žiak vypočítal dĺžku aspoň 2 z úsečiek AX, SX, BY, SY, CX, CY, pričom jedna z týchto úsečiek je stranou jedného z trojuholníkov ASX, BSY, CXY a druhá je stranou niektorého iného z týchto trojuholníkov **2 body**
  - ak žiak vypočítal dĺžku len jednej z uvedených úsečiek alebo vypočítal len dĺžku dvoch takých úsečiek, ktoré sú obidve stranami toho istého z trojuholníkov ASX, BSY, CXY, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za dĺžku úsečky XY získanú správnym postupom **1 bod**

Riešenie II

- za rovnicu priamky p **2 body**
  - ak žiak nenapísal rovnicu priamky p, ale v jeho riešení je uvedený niektorý údaj, ktorý je súčasťou postupu hľadania tejto rovnice (súradnice bodu S, súradnice smerového vektora priamky AB, rovnica priamky AB alebo jej smernica), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za súradnice bodu X **1 bod**
- za súradnice bodu Y **1 bod**
- za dĺžku úsečky XY získanú správnym postupom **1 bod**