1. V pravouhlom trojuholníku má jedna odvesna dĺžku 6 cm. Dĺžka druhej odvesny je aritmetickým priemerom dĺžky prvej odvesny a prepony. Vypočítajte dĺžku prepony.
(*3 body*)

Riešenie

Označme a, b odvesny, c preponu. Podľa zadania sa

$$a = 6, \tag{1}$$

$$b = \frac{a+c}{2}, \tag{2}$$

z Pytagorovej vety vyplýva $a^2 + b^2 = c^2.$ (3)

Po dosadení (1) a (2) do (3) dostaneme

$$6^2 + \left(\frac{6+c}{2}\right)^2 = c^2, \tag{4}$$

odtiaľ úpravami $36 + \left(3 + \frac{c}{2}\right)^2 = c^2, \quad 36 + 9 + 3c + \frac{c^2}{4} = c^2,$

$$45 + 3c - \frac{3}{4}c^2 = 0, \quad 180 + 12c - 3c^2 = 0, \quad c^2 - 4c - 60 = 0. \tag{5}$$

Posledná rovnica má diskriminat

$$D = (-4)^2 - 4.(-60) = 256, \sqrt{D} = 16$$

Riešeniami rovnice (5) sú preto

$$c_1 = \frac{4+16}{2} = 10, \quad c_2 = \frac{4-16}{2} = -6.$$

Pretože veľkosť prepony je kladné číslo, je hľadaným riešením len $c = 10$.

Prepona má dĺžku 10 cm.

Poznámka. Ak z (1) a (2) vyjadríme $c = 2b - 6$
a toto vyjadrenie dosadíme do (3), dostaneme rovnicu

$$6^2 + b^2 = (2b-6)^2, \tag{6}$$

z nej úpravami $36 + b^2 = 4b^2 - 24b + 36, \quad 24b = 3b^2, \quad 8b = b^2.$

Posledná rovnica má 2 korene: $b_1 = 8,\ b_2 = 0.$

Veľkosť odvesny je kladné číslo, preto dĺžka druhej odvesny je $b = 8$. Hľadanú dĺžku prepony nájdeme z Pytagorovej vety

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100,$$

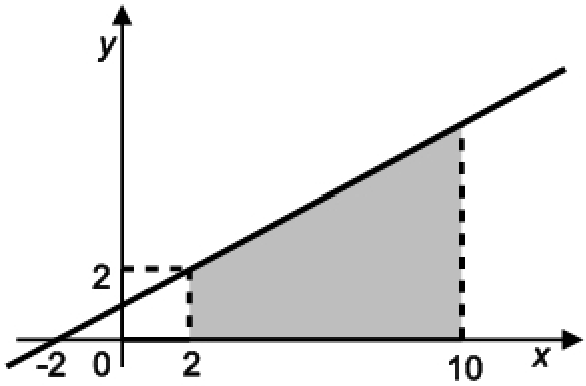
odtiaľ (keďže hľadané c je kladné číslo) $c = 10$.

Hodnotenie

(3 body)

- ak žiak uviedol sústavu (2), (3) alebo niektorú z rovníc (4), (6) **1 bod**
- za vyriešenie niektorej z rovníc (4), (6) **1 bod**
- za dĺžku prepony získanú správnym postupom **1 bod**
  tento 1 bod prideľte, ak žiak správne vyriešil niektorú z rovníc (4), (6) a z jeho zápisu je zrejmé, že vylúčil riešenie $c = -6$, resp. $b = 0$.

2. Na obrázku je časť grafu lineárnej funkcie. Nájdite jej predpis a vypočítajte obsah vyznačenej plochy. (*4 body*)



Riešenie

(*1. krok – predpis lineárnej funkcie*)
Predpis f môžeme nájsť napr. niektorým z nasledujúcich postupov:

- Hľadaný predpis má tvar $f(x) = ax + b$. (1)

  Podľa obrázka sa $f(-2) = 0$ a $f(2) = 2$, dosadením týchto hodnôt do (1) máme
  $$0 = a\cdot(-2) + b$$
  $$2 = a\cdot 2 + b \qquad (2)$$
  odtiaľ $b = 1$, $a = 0{,}5$.

- Priamka, na ktorej ležia body $A[-2\,,0]$ a $B[2\,,2]$, má smerový vektor $B - A = (4\,,2)$. Vektor $(2\,,-4)$ je potom jej normálový vektor, preto jej rovnica má tvar
  $$2x - 4y + c = 0.$$
  Ak do tejto rovnice dosadíme napr. súradnice bodu $A[-2\,,0]$, ležiaceho na našej priamke, dostaneme $c = 4$. Hľadaná rovnica je teda
  $$2x - 4y + 4 = 0, \quad \text{t.j.} \quad x - 2y + 2 = 0.$$

- Smernica priamky, na ktorej ležia body $[2\,,2]$ a $[-2\,,0]$, je $k = \frac{2-0}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$, preto rovnica priamky na obrázku je $y = \frac{1}{2}x + q$. Dosadením súradníc bodu $[2\,,2]$ (ležiaceho na danej priamke) do tejto rovnice dostávame
  $$2 = \frac{1}{2}\cdot 2 + q, \text{ odtiaľ } q = 1.$$

Predpis lineárnej funkcie na obrázku je teda
$$f(x) = 0{,}5x + 1. \qquad (3)$$

(*2. krok – obsah vyznačenej plochy*)
Obsah vyznačenej plochy môžeme vypočítať niektorým z nasledujúcich postupov:

- Vyznačená plocha je pravouhlý lichobežník, ktorého základne majú dĺžky
  $$a = f(2) = 2, \quad b = f(10) = 6 \qquad (4)$$
  (hodnotu $f(10)$ sme našli dosadením $x = 10$ do (3))
  a ktorého výška je $v = 10 - 2 = 8$.

Plocha tohto lichobežníka je

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot v = \frac{2+6}{2} \cdot 8 = 32\,.$$

- Veľkosť vyznačenej plochy je

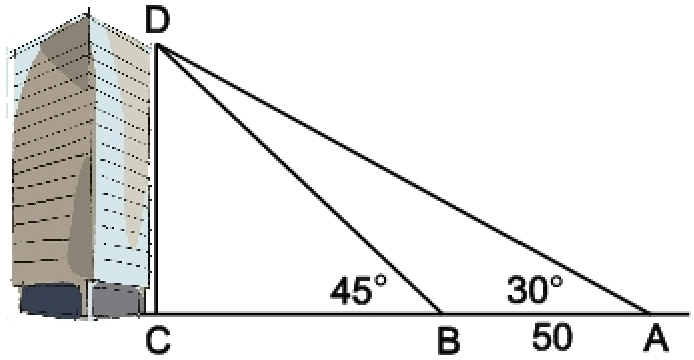
$$\int_2^{10} f(x)\,dx = \int_2^{10} (0{,}5x+1)\,dx = \left[0{,}5 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_2^{10} = (25+10)-(1+2) = 32\,.$$

Lineárna funkcia na obrázku má predpis $f(x) = 0{,}5x + 1$, obsah vyznačenej plochy je 32.

Hodnotenie
(4 body)

- za predpis funkcie **2 body**
  - ak žiak nenašiel predpis funkcie, ale uviedol aspoň jednu z rovníc (2) alebo správne vypočítal jeden z koeficientov a, b v predpise (1), alebo správne určil smerový alebo normálový vektor danej priamky, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
  - ak žiak uviedol len rovnicu (1), prideľte mu z týchto 2 bodov **0,5 boda**
- za obsah vyznačenej plochy **2 body**
  - ak žiak nevypočítal obsah alebo ho vypočítal nesprávne, ale v riešení uviedol rovnosť $P = \int_2^{10} (0{,}5x+1)dx$ alebo konštatoval, že vyznačená plocha je lichobežník, a súčasne s týmto konštatovaním správne <u>vypočítal</u> jeho výšku alebo veľkosť dlhšej základne (*tj. hodnotu* $f(10)$), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**

3. Bod D na okraji strechy výškovej budovy stojacej na rovine vidíme z miesta A pod výškovým uhlom 30°. Ak prídeme k budove o 50 m bližšie, vidíme tento bod D z miesta B pod výškovým uhlom 45°. Vypočítajte výšku budovy. Výsledok uveďte zaokrúhlený na metre. (*4 body*)

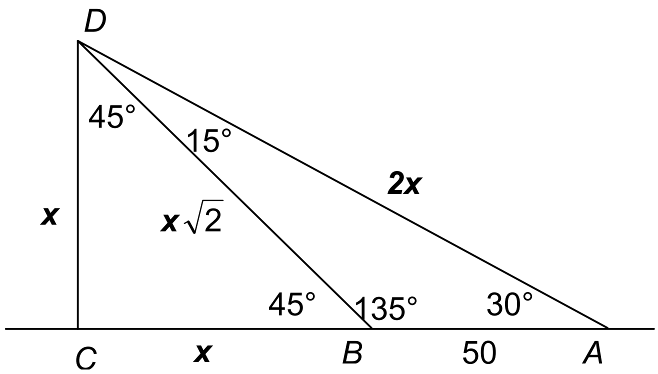


Riešenie

Označme hľadanú výšku x. Potom

- pretože trojuholník BCD je pravouhlý a rovnoramenný, platí $|CB| = x$, $|BD| = \sqrt{2}x$,
- pretože trojuholník ACD je „polovica" rovnostranného trojuholníka, platí $|AD| = 2x$

(pozri obrázok 1).



Obr. 1

Výšku x môžeme vypočítať niektorým z nasledujúcich postupov:

- (*z pravouhlého trojuholníka ACD použitím goniometrických funkcií*[1])

  V trojuholníku ACD sa $\tan 30° = \dfrac{|CD|}{|AC|}$, tj.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x+50}, \qquad (1)$$

odtiaľ $$x = \frac{50}{\sqrt{3}-1} \cong \frac{50}{0{,}732\,050\,81} \cong 68 \text{ (m)}.$$

- (*z pravouhlého trojuholníka ADC Pytagorovou vetou*)

  Z Pytagorovej vety $|AD|^2 = |DC|^2 + |AC|^2$ dostávame

$$4x^2 = x^2 + (x+50)^2, \qquad (2)$$

odtiaľ $$2x^2 - 100x - 2500 = 0. \qquad (3)$$

Riešením tejto rovnice sú čísla

[1] Namiesto označenia tg používame tan

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{30\,000}}{4} = 25\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Hľadaná výška je kladné číslo, preto z týchto dvoch riešení pripadá do úvahy len

$$x = 25\left(1 + \sqrt{3}\right) \cong 68 \text{ (m)}.$$

- (*z trojuholníka ABD kosínusovou vetou*)
  Z kosínusovej vety $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos 30°$ dostávame

$$2x^2 = 2\,500 + 4x^2 - 2 \cdot 50 \cdot (2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (4)$$

tj.

$$2x^2 - 100 \cdot \sqrt{3}x + 2\,500 = 0. \qquad (5)$$

Riešením tejto rovnice sú čísla

$$x_{1,2} = \frac{100 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{10\,000}}{4} = 25\left(\sqrt{3} \pm 1\right),$$

tj.

$$x_1 \cong 68, \; x_2 \cong 18.$$

Číslo $x_2 \cong 18$ nemôže byť hľadanou výškou, pretože potom by strana *AD*, ktorá je v trojuholníku *ABD* najdlhšia (leží proti najväčšiemu uhlu), mala dĺžku menšiu ako strana *AB*, čo nie je možné.
Hľadaná výška je preto $x_1 \cong 68$ (m).

- (*z trojuholníka ABD sínusovou vetou*)
  Zo sínusovej vety $|AB| \cdot \sin 30° = |BD| \cdot \sin 15°$ dostávame

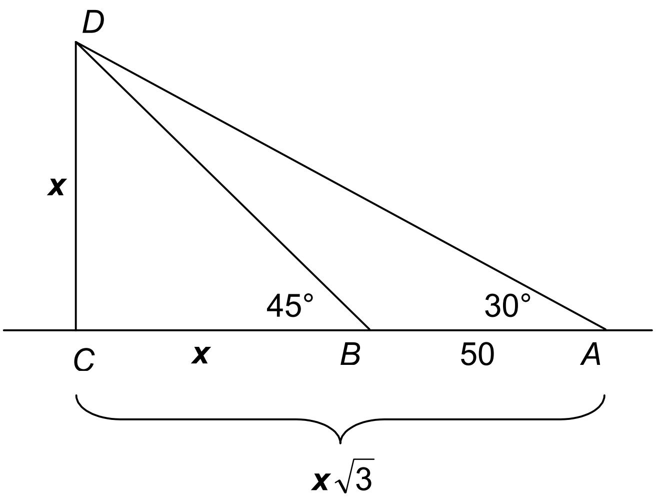
$$50 \cdot \sin 30° = \sqrt{2}\, x \cdot \sin 15°, \qquad (6)$$

odtiaľ

$$x = \frac{50 \cdot \sin 30°}{\sqrt{2} \cdot \sin 15°} \cong \frac{50 \cdot 0{,}5}{1{,}414\,213\,562 \cdot 0{,}258\,819\,045} \cong 68 \text{ (m)}.$$

Výška budovy je približne 68 m.

Poznámky. 1. Rovnicu $x + 50 = \sqrt{3}\, x$ (ktorá je ekvivalentná s rovnicou (1)) môže žiak „odčítať“ priamo z obrázka, ak vyjadrí dĺžky $|AC|$ a $|BC|$ pomocou x (pozri obr. 2).



Obr. 2

2. Rovnicu ekvivalentnú s rovnicou (1) dostaneme aj použitím niektorej z rovností

$$\tan 60° = \frac{|AC|}{|CD|},\ \cos 30° = \frac{|AC|}{|AD|},\ \sin 60° = \frac{|AC|}{|AD|},$$

tj. $$\sqrt{3} = \frac{x+50}{x} \quad \text{alebo} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x+50}{2x}. \qquad (7)$$

3. Použitím kosínusovej vety pre stranu AD v trojuholníku ABD dostaneme

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2\,.\,|AB|\,.\,|BD|\,.\cos 135°,$$

t.j. $$4x^2 = 2\,500 + 2x^2 - 2\,.\,50\,.\left(x\sqrt{2}\right).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a úpravou tejto rovnice dostaneme rovnicu (3).

Hodnotenie
(4 body)

- za zostavenie rovnice s 1 neznámou, umožňujúcej nájdenie hodnoty x (*napr. niektorá z rovníc (1) až (7)*), *tieto 2 body prideľte aj vtedy, keď žiak na obrázku vyjadril pomocou x dĺžky* $|AC|$ *a* $|BC|$ *(pozri obr. 2)* — **2 body**
  - o ak žiak nezostavil takú rovnicu, ale vyjadril pomocou x aspoň jednu z dĺžok $|BC|$, $|BD|$, $|AD|$, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za vyriešenie tejto rovnice — **1,5 boda**
- ak žiak uviedol ako odpoveď hodnotu x získanú správnym postupom a <u>správne zaokrúhlenú</u> — **0,5 boda**
  - o ak žiak neuviedol výsledok alebo uviedol výsledok, ktorý nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokrúhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od požadovaného výsledku, prideľte z tohto 0,5 boda **0 bodov**

4. V zásielke obsahujúcej 30 výrobkov je 5 chybných. Náhodne vyberieme 3 výrobky. Aká je pravdepodobnosť, že najviac 1 z nich bude chybný ? Výsledok uveďte zaokrúhlený na 3 desatinné miesta. (*4 body*)

Riešenie I (na poradí nezáleží)

Predstavme si, že 3 výrobky vyberáme „naraz“ (teda na poradí výberu nezáleží). Potom 3 výrobky z 30 môžeme vybrať celkom

$$\binom{30}{3} = 4\,060 \text{ spôsobmi.}$$

Zaujímajú nás tie výbery, pri ktorých vyberieme z 5 chybných a 25 bezchybných výrobkov buď

- 1 chybný a 2 bezchybné výrobky, týchto výberov je

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{25}{2} = 5 \cdot 300 = 1\,500\,,$$

alebo

- 3 bezchybné výrobky, týchto výberov je

$$\binom{25}{3} = 2\,300\,.$$

Celkový počet výberov 3 výrobkov, pri ktorých vyberieme najviac 1 chybný, je teda

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{25}{2} + \binom{25}{3} = 3\,800\,.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je potom

$$\frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{25}{2} + \binom{25}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{3\,800}{4\,060} \cong 0{,}936.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je približne 0,936.

Riešenie II (na poradí záleží)

Ak si predstavíme, že 3 výrobky z 30 vyberáme postupne (teda najprv prvý, potom druhý atď.), môžeme na výpočet použiť variácie alebo podmienenú pravdepodobnosť.

IIa) Riešenie pomocou variácií

Ak na poradí vyberania záleží, môžeme 3 výrobky z 30 vybrať celkom

$$N = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360 \text{ spôsobmi.}$$

1 chybný a 2 bezchybné výrobky môžeme z celkom 5 chybných a 25 bezchybných výrobkov vybrať

$$M_1 = 3 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24 = 9\,000 \text{ spôsobmi}$$

(chybný výrobok môžeme vybrať ako prvý, ako druhý alebo ako tretí – to sú celkom 3 možnosti jeho poradia, na vybrané miesto môžeme umiestniť 1 z 5 chybných výrobkov celkom 5 spôsobmi, na prvé z neobsadených miest môžeme umiestniť ktorýkoľvek z 25 bezchybných výrokov a na druhé neobsadené miesto ktorýkoľvek zo zvyšných 24 bezchybných výrobkov).

3 bezchybné výrobky z celkom 25 bezchybných môžeme – ak na poradí vyberania záleží – vybrať

$$M_0 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800 \text{ spôsobmi.}$$

Hľadaná prevdepodobnosť je potom

$$P = \frac{M_0 + M_1}{N} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 + 3 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{22\,800}{24\,360} \cong 0{,}936 \,.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je približne 0,936.

IIb) Riešenie pomocou podmienenej pravdepodobnosti
Pravdepodobnosť, že ako prvý vyberieme chybný výrobok a zvyšné 2 vybrané budú bezchybné, je

$$P_1 = \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{24}{28} \cong 0{,}123\,153 \,.$$

Pravdepodobnosť, že chybný výrobok vyberieme ako druhý, resp. tretí v poradí a ostatné 2 budú bezchybné, je

$$P_2 = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{24}{28} \cong 0{,}123\,153 \,,$$

resp.

$$P_3 = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{5}{28} \cong 0{,}123\,153 \,.$$

.

Pravdepodobnosť, že vyberieme všetky 3 výrobky bezchybné, je

$$P_0 = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} \cong 0{,}566\,502 \,.$$

Potom hľadaná pravdepodobnosť, že vyberieme najviac 1 chybný výrobok, je

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28} + 3 \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 5}{30 \cdot 29 \cdot 28} \cong$$

$$\cong 0{,}566\,502 + 3 \cdot 0{,}123\,153 = 0{,}935\,961 \cong 0{,}936 \,.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je približne 0,936.

Poznámka. Je možné, že niektorí žiaci pri výpočte uvedenej pravdepodobnosti použijú Bernoulliho schému, teda budú predpokladať, že pravdepodobnosť výberu chybného výrobku je

$$P_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \,,$$

pravdepodobnosť výberu bezchybného výrobku

$$P_0 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

a hľadanú pravdepodobnosť vypočítajú nasledovne:

$$P = P_0^3 + \binom{3}{1} \cdot P_0^2 \cdot P_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{200}{216} \cong 0{,}926 \,.$$

(Pozor, tento výsledok sa od správneho **odlišuje** na mieste stotín.)

Hodnotenie
(4 body)

Riešenie I

- za správne určený počet všetkých možností výberu 3 výrobkov z 30 (*stačí zápis pomocou kombinačného čísla*) **1 bod**
- za správne určený počet priaznivých možností (*stačí zápis pomocou kombinačného čísla*) **2 body**
  - o ak žiak uvedie, že počet priaznivých možností je $\binom{5}{1}\cdot\binom{25}{2}$, tj. 1 500, alebo $\binom{25}{2}+\binom{25}{3}$, tj. 2 600, prideľte mu z týchto 2 bodov **1 bod**
- za výsledok získaný správnym postupom[2] a <u>správne zaokrúhlený</u> **1 bod**
  - o za výsledok získaný správnym postupom, ktorý ale nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokruhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od správneho výsledku, prideľte z tohto 1 boda **0,5 boda**

Riešenie IIa

- za správne určený počet všetkých možností výberu 3 výrobkov z 30 **1 bod**
- za správne určený počet priaznivých možností **2 body**
  - o ak žiak uvedie, že počet priaznivých možností je $3 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24$, tj. 9 000, alebo $25 \cdot 24 \cdot 23 + 3 \cdot 25 \cdot 24$, tj. 15 600, alebo $25 \cdot 24 \cdot 23 + 5 \cdot 25 \cdot 24$, tj. 16 800, prideľte mu z týchto 2 bodov **1 bod**
- za výsledok získaný správnym postupom[2] a <u>správne zaokrúhlený</u> **1 bod**
  - o za výsledok získaný správnym postupom, ktorý ale nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokruhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od správneho výsledku, prideľte z tohto 1 boda **0,5 boda**

Riešenie IIb

- za výsledok získaný výpočtom $P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ a <u>správne zaokrúhlený</u> **4 body**
  - o za výsledok získaný uvedeným výpočtom, ktorý ale nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokruhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od požadovaného výsledku, prideľte celkom **len 3,5 boda**
  - o za výsledok získaný výpočtom $P = P_0 + P_k$, kde $k \in \{1,2,3\}$, tj. výpo-

[2] tj. žiak vydelil počet priaznivých možností počtom všetkých možností, pričom pri hodnotení získal za počet priaznivých aj za počet všetkých možností nenulový počet bodov

čtom $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{25 \cdot 24 \cdot 5}{30 \cdot 29 \cdot 28}$, alebo výpočtom $P_1 + P_2 + P_3$,
a zaokrúhlený v súlade s požiadavkami zadania, prideľte celkom

len 3 body

- o za výsledok získaný výpočtom $P = P_0 + P_k$, kde $k \in \{1,2,3,4\}$, tj. výpočtom $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{25 \cdot 24 \cdot 5}{30 \cdot 29 \cdot 28}$, alebo výpočtom $P_1 + P_2 + P_3$, ktorý <u>nie je</u> zaokrúhlený v súlade s požiadavkami zadania, prideľte celkom

len 2,5 boda

Riešenie pomocou Bernoulliho schémy

- za výsledok získaný výpočtom $P = P_0^3 + 3 \cdot P_0^2 \cdot P_1$ (bez ohľadu na to, či je alebo nie je zaokrúhlený) **3,5 boda**
  - o za výsledok získaný výpočtom $P = P_0^3 + P_0^2 \cdot P_1$ alebo $P = 3 \cdot P_0^2 \cdot P_1$ (bez ohľadu na to, či je alebo nie je zaokrúhlený), prideľte celkom

2,5 boda

5a) Nájdite kvocient q a prvý člen a_1 geometrickej postupnosti, ak súčet nekonečného geometrického radu z nej utvoreného je $S = 4$ a súčet jej prvých 6 členov $S_6 = \frac{63}{16}$.

(*5 bodov*)

Riešenie

Podľa zadania má platiť
$$S = \frac{a_1}{1-q} = 4, \tag{1}$$
$$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{63}{16}. \tag{2}$$

Ak (1) dosadíme do (2), dostaneme postupnými úpravami
$$4 \cdot \left(1-q^6\right) = \frac{63}{16}, \qquad 1-q^6 = \frac{63}{64}$$
$$q^6 = \frac{1}{64}. \tag{3}$$

Rovnica (3) má dve riešenia: $\quad q_1 = \frac{1}{2}, \quad q_2 = -\frac{1}{2}.$

Dosadením získaných hodnôt q_1 a q_2 do (1) nájdeme príslušné hodnoty prvého člena postupnosti:

- pre $q_1 = \frac{1}{2}$ dostaneme $\dfrac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = 4$, odtiaľ $a_1 = 2$;
- pre $q_2 = -\frac{1}{2}$ dostaneme $\dfrac{a_1}{1+\frac{1}{2}} = 4$, odtiaľ $a_1 = 6$.

Daná úloha má dve riešenia: $q_1 = \frac{1}{2}$ **a** $a_1 = 2$ **alebo** $q_2 = -\frac{1}{2}$ **a** $a_2 = 6$**.**

Poznámka. Sústavu (1), (2) možno riešiť aj nasledovne : z rovnice (1) vyjadríme $q = 1 - \frac{a_1}{4}$ a dosadíme do (2), postupnými úpravami dostaneme
$$a_1 \cdot \frac{1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6}{1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)} = \frac{63}{16}, \quad a_1 \cdot \frac{1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6}{\frac{a_1}{4}} = \frac{63}{16}, \quad 1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6 = \frac{63}{64},$$
$$\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6 = \frac{1}{64}. \tag{4}$$

Rovnica (4) má dve riešenia :

- buď $1-\frac{a_1}{4} = \frac{1}{2}$, tj. $a_1 = 2$; zodpovedajúca hodnota q je $q = 1-\frac{a_1}{4} = \frac{1}{2}$,
- alebo $1-\frac{a_1}{4} = -\frac{1}{2}$, tj. $a_1 = 6$; zodpovedajúca hodnota q je $q = 1-\frac{a_1}{4} = -\frac{1}{2}$.

Hodnotenie
(5 bodov)

• ak žiak uviedol obidve rovnice (1) a (2)	**1 bod**
• ak žiak z jednej z rovníc (1), (2) vyjadril jednu z neznámych a dosadil do druhej rovnice	**1 bod**
• ak žiak dospel správnym postupom k rovnici (3) alebo (4)	**1 bod**
• za každé riešenie rovnice (3), resp. (4) (*ak žiak riešil rovnicu (3), tak získava tieto body za výpočet hodnôt* q ; *ak riešil rovnicu (4), získava tieto body za výpočet hodnôt* a_1)	**po 0,5 boda**
• za každý správne určený zvyšný člen dvojice $[a_1 ; q]$ (*ak žiak riešil rovnicu (3), tak získava tieto body za výpočet príslušných hodnôt* a_1; *ak riešil rovnicu (4), získava tieto body za výpočet príslušných hodnôt* q)	**po 0,5 boda**

5b) Vypočítajte súradnice bodu N, ktorý je súmerný s bodom $M[1;1;3]$ podľa roviny $\alpha: 2x+y-3z-8=0$. (*5 bodov*)

Riešenie

Nech bod N má súradnice $N[x_N;y_N;z_N]$.

Bod N je jednoznačne určený nasledujúcimi vlastnosťami
(I) body M, N ležia na priamke q, ktorá je kolmá na rovinu α,
(II) stred S úsečky MN leží v rovine α.

Normálový vektor roviny $\alpha: 2x+y-3z-8=0$ je

$$\vec{n}=(2,1,-3),$$

pomocou neho môžeme vlastnosť (I) vyjadriť napr. niektorým z nasledujúcich spôsobov:

- Bod N leží na priamke q, ktorá má parametrické vyjadrenie $q: X=M+t\cdot\vec{n}$, t.j.
$$q: X=[1;1;3]+t\cdot(2,1,-3), \quad t\in R, \tag{1}$$
resp.
$$q: x=1+2t, \quad y=1+t, \quad z=3-3t, \quad t\in R. \tag{2}$$
Preto pre niektorú hodnotu t musí platiť
$$x_N=1+2t, \quad y_N=1+t, \quad z_N=3-3t. \tag{3}$$

- Vektor N–M je násobok vektora $\vec{n}=(2,1,-3)$, teda pre niektoré $t\in R$ platí
$$N-M=t\cdot\vec{n},$$
t.j.
$$(x_N-1;\,y_N-1;\,z_N-3)=t\cdot(2,1,-3). \tag{4}$$

Vlastnosť (II) môžeme vyjadriť napr. niektorým z nasledujúcich spôsobov:

(IIa) Stred S úsečky MN je priesečník priamky q s rovinou α. Priesečník q, α nájdeme dosadením (2) do rovnice roviny α

$$2(1+2t)+(1+t)-3(3-3t)-8=0, \tag{5}$$

odtiaľ $14t=14$, t.j. $t=1$.

Dosadením tohto t do (2) nájdeme súradnice bodu S:

$$S[3;2;0].$$

Súradnice bodu N nájdeme jednou z nasledujúcich úvah:

- Bod S je stred úsečky MN, preto $S=\dfrac{M+N}{2}$, (6)
t.j.
$$3=\frac{1+x_N}{2}, \quad 2=\frac{1+y_N}{2}, \quad 0=\frac{3+z_N}{2}, \tag{7}$$
odtiaľ
$$x_N=5, \quad y_N=3, \quad z_N=-3. \tag{8}$$
- Vektory $N-S$ a $S-M$ sa rovnajú
$$N-S=S-M, \tag{9}$$
t.j.
$$(x_N-3;\,y_N-2;\,z_N)=(2;1;-3) \tag{10}$$
odtiaľ dostávame výsledok (8).
- V parametrickej rovnici priamky q zodpovedal bod M hodnote parametra $t=0$ (pozri rovnice (2)), priesečník S zodpovedal hodnote $t=1$. Číslo t určuje, aký násobok

vektora $\vec{n}$ musíme pripočítať k bodu *M*. Ak sme sa do stredu *S* úsečky *MN* dostali z bodu *M* pripočítaním vektora $\vec{n}$, tak do jej krajného bodu sa dostaneme, ak k *M* pripočítame dvojnásobok vektora $\vec{n}$:

$$N = M + 2\cdot\vec{n}\,. \qquad (11)$$

Dosadením súradníc bodu M a vektora $\vec{n}$ do (11) alebo – čo je to isté – dosadením $t = 2$ do rovníc (2) dostaneme výsledok (8).

- Vzdialenosti $|MS|$ a $|NS|$ sú rovnaké :

$$|MS| = |NS|\,. \qquad (12)$$

Ak túto rovnosť umocníme na druhú a vyjadríme pomocou súradníc bodov $M[1;1;3]$, $S[3;2;0]$, $N[1+2t\,;1+t\,;3-3t]$ (pozri (3)), dostaneme

$$(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-3)^2 = [(1+2t)-3]^2 + [(1+t)-2]^2 + [(3-3t)-0]^2,$$

odtiaľ postupne $\quad 14 = 14t^2 - 28t + 14\,,$

$$14t^2 - 28t = 0\,, \quad t(t-2) = 0\,,$$

teda $\quad t = 0 \quad$ alebo $\quad t = 2\,.$

Dosadením $t = 0$ do (2) dostaneme súradnice bodu *M*, ten nie je hľadaným riešením. Dosadením $t = 2$ do (2) dostávame hľadané súradnice bodu *N*, pozri (8).

(IIb) Stred *S* úsečky *MN* leží v rovine α. Keďže $S = \dfrac{M+N}{2}$, má bod *S* súradnice $S\left[\dfrac{1+x_N}{2};\dfrac{1+y_N}{2};\dfrac{3+z_N}{2}\right]$, tie musia vyhovovať rovnici roviny α, teda musí platiť

$$2\left(\frac{1+x_N}{2}\right) + \frac{1+y_N}{2} - 3\left(\frac{3+z_N}{2}\right) - 8 = 0\,,$$

po úprave $\quad 2x_N + y_N - 3z_N - 22 = 0\,. \qquad (13)$

Ak do (13) dosadíme podľa (2) alebo (3), dostaneme

$$2(1+2t) + (1+t) - 3(3-3t) - 22 = 0\,, \qquad (14)$$

odtiaľ $\quad 14t = 28\,, \quad$ t.j. $\quad t = 2\,.$

Dosadením tohto *t* do (2) alebo (3) dostávame výsledok (8).

(IIc) Body *M, N* majú rovnakú vzdialenosť od roviny α, pritom

$$d(M,\alpha) = \frac{|2x_M + y_M - 3z_M - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 1 - 3\cdot 3 - 8|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\,. \qquad (15)$$

Preto aj vzdialenosť $d(N,\alpha)$ musí byť $\sqrt{14}$:

$$d(N,\alpha) = \sqrt{14}\,, \qquad (16)$$

t.j.

$$\frac{|2x_N + y_N - 3z_N - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x_N + y_N - 3z_N - 8|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\,, \qquad (17)$$

$$|2x_N + y_N - 3z_N - 8| = 14\,, \qquad (18)$$

odtiaľ

$$2x_N + y_N - 3z_N - 8 = 14 \quad \text{alebo} \quad 2x_N + y_N - 3z_N - 8 = -14\,,$$

t.j. $\quad 2x_N + y_N - 3z_N - 22 = 0 \qquad (19)$

alebo $\quad 2x_N + y_N - 3z_N + 6 = 0\,. \qquad (20)$

Dosadením (2) do (19) dostaneme rovnicu, ktorej riešením sú súradnice bodu *M*, ten nie je riešením našej úlohy. Dosadením (2) do (20) dostávame rovnicu (14), ktorá vedie k riešeniu (8).

Bod *N* má súradnice $N[5\,;3\,;-3]$.

Poznámka. Je možné, že niektorí žiaci namiesto rovnice (16) použijú rovnicu

$$|MN| = 2\cdot d(M,\alpha) = 2\sqrt{14}\,, \tag{20}$$

Po dosadení súradníc bodov $M[1;1;3], N[1+2t\,;1+t\,;3-3t]$ do (20) dostaneme postupne

$$\sqrt{(2t)^2 + t^2 + (-3t)^2} = 2\sqrt{14}\,, \tag{21}$$

$$\sqrt{14t^2} = 2\sqrt{14}\,, \qquad \sqrt{t^2} = 2\,,$$

odtiaľ $\quad t = 2 \quad$ alebo $\quad t = -2$.

Dosadením do (2) dostaneme pre $t = 2$ bod $N_1[5\,;3\,;-3]$, pre $t = -2$ bod $N_2[-3\,;-1;9]$.
Hľadaný bod *N* leží v opačnom polpriestore určenom rovinou α než bod *M*. Dosadením súradníc bodov *M*, N_1, N_2 do rovnice roviny α dostávame[3]

pre *M* $\quad 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 3\cdot 3 - 8 = -14 < 0$

pre N_1 $\quad 2\cdot 5 + 1\cdot 3 - 3\cdot(-3) - 8 = 14 > 0$

pre N_2 $\quad 2\cdot(-3) + 1\cdot(-1) - 3\cdot 9 - 8 = -42 < 0$.

To znamená, že bod N_2 leží v rovnakom polpriestore ako *M*, bod N_1 leží v opačnom polpriestore. Hľadané riešenie je preto $N_1[5\,;3\,;-3]$.

Hodnotenie
(5 bodov)

Riešenie IIa
(žiak hľadá súradnice stredu úsečky *MN*)

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za nájdenie hodnoty *t* = 1 alebo výpočet súradníc bodu *S* **1 bod**
- za výpočet súradníc bodu *N* **2 body**
  z toho
  - za vyjadrenie bodu *N* pomocou *M, S* alebo *M*, $\vec{n}$ **1 bod**
    (*napr. rovnice (6), (7), (9), (10), (11), (12)*)
    Tento 1 bod prideľte len vtedy, ak žiak našiel súradnice bodu S alebo hodnotu t = 1

[3] Použitá úvaha presahuje rámec Cieľových požiadaviek z matematiky pre úroveň A, je však možné, že ju niektorí žiaci použijú.

Riešenie IIb

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za rovnicu (13) **2 body**
- za výpočet súradníc bodu *N* **1 bod**

Riešenie IIc
(pomocou vzdialenosti bodu od roviny)

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za výpočet vzdialenosti $d(M,\alpha)$ **0,5 bodu**
- za ľubovoľnú z rovníc (17), (18) **1 bod**
- za riešenie rovnice (20) **1 bod**
- za výpočet súradníc bodu *N* **0,5 bodu**

Hodnotenie riešenia uvedeného v poznámke

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za výpočet vzdialenosti $d(M,\alpha)$ **0,5 bodu**
- za rovnicu (21) **1 bod**
- za nájdenie koreňa $t = -2$ **0,5 bodu**
- za zdôvodnenie, že N_2 nie je hľadané riešenie **0,5 bodu**
- za výpočet súradníc bodu *N* **0,5 bodu**