Európska únia
Európsky sociálny fond

NÚCEM
NÁRODNÝ ÚSTAV CERTIFIKOVANÝCH MERANÍ VZDELÁVANIA

Operačný program VZDELÁVANIE

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Základné pojmy pravdepodobnosti

Náhoda

Pod náhodou možno rozumieť množstvo drobných faktorov, ktoré sa nedajú identifikovať. Keď tieto faktory pôsobia na priebeh reálneho procesu, jeho výsledok je neistý, hovoríme, že výsledok závisí na náhode.

Náhodný pokus

Náhodný pokus je reálny proces, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, za ktorých sa uskutočňuje.

Náhodný jav, elementárny jav alebo náhodná udalosť, elementárna udalosť

Náhodný jav je overiteľné tvrdenie o výsledku náhodného pokusu.

Elementárne javy alebo elementárne udalosti sú najjemnejšie výsledky, o ktorých ešte potrebujeme v danej situácii uvažovať.

Množina výsledkov (priestor elementárnych javov) sa označuje Ω. Dá sa ukázať, že náhodným javom možno jednoznačne priradiť podmnožiny množiny výsledkov náhodného pokusu. Náhodný jav sa zvykne nazývať aj náhodná udalosť. Rovnocenne sa používajú obidva pojmy.

Istý jav alebo istá udalosť je jav, ktorý nastáva pri každom výsledku náhodného pokusu a označuje sa Ω.

Nemožný jav alebo nemožná udalosť je jav, ktorý pri realizácii daného pokusu nemôže nastať a označuje sa $\emptyset$.

Ak náhodný jav A nastáva pri danom výsledku náhodného pokusu, hovoríme, že tento **výsledok je priaznivý** náhodnému javu A.

Pole náhodných javov

Množina náhodných javov sa nazýva aj **pole náhodných javov** alebo pole náhodných udalostí.

Pretože náhodné javy sú podmnožiny množiny výsledkov, môžeme definovať **zjednotenie**, **prienik**, **rozdiel** javov, **opačný jav** k javu A.

Náhodné javy sa nazývajú **nezlučiteľné**, ak nemôžu nastať súčasne, teda javy sú nezlučiteľné, ak $A \cap B = \emptyset$.

Pravdepodobnosť náhodného javu

Pravdepodobnosť náhodného javu *A* je číslo, okolo ktorého kolíšu relatívne početnosti tohto javu

$$\boldsymbol{n_A / n}$$

počítané pri veľkom počte *n* nezávislých opakovaní daného náhodného pokusu (n_A je počet z týchto *n* pokusov, pri ktorých nastal jav *A*).

Vlastnosti pravdepodobnosti sú odvodené z vlastností relatívnej početnosti.

Klasická pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť náhodného javu *A* možno vypočítať ako podiel počtu priaznivých výsledkov javu *A* a počtu všetkých možných výsledkov, za predpokladu, že množina všetkých možných výsledkov je konečná a každý z výsledkov má rovnakú možnosť, že nastane.

Konečný pravdepodobnostný priestor

Konečný pravdepodobnostný priestor je definovaný ako usporiadaná dvojica (Ω, *p*), kde Ω je konečná množina elementárnych javov a *p* je funkcia definovaná na Ω spĺňajúca vlastnosti:

1. $p(\omega) \geq 0$ pre všetky $\omega \in \Omega$.

2. $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$

Náhodným javom je každá podmnožina množiny Ω. Pre $A \subset \Omega,\ A \neq \emptyset$ definujeme pravdepodobnosť

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

a pravdepodobnosť prázdnej množiny $P(\emptyset) = 0.$

Špeciálne prípady konečného pravdepodobnostného priestoru

Klasický pravdepodobnostný priestor, pričom $p(\omega)=1/n,$ pre všetky $\omega\in\Omega,$ kde *n* je počet prvkov množiny Ω.

Bernoulliho schéma – stochastický model *n*-násobného nezávislého opakovania náhodného pokusu, pri ktorom môže nastať len úspech, označovaný 1, s pravdepodobnosťou *u* a neúspech, označovaný 0, s pravdepodobnosťou 1 – *u*.

Ω je teraz množina postupností núl a jednotiek dĺžky *n*.

Pre $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots\omega_n)\in\Omega$ definujeme $p(\omega)=u^k\left(1-u\right)^{n-k},$

kde *k* je počet jednotiek v postupnosti ω.

Pravdepodobnosť nastania *k* úspechov pri *n* opakovaniach pokusu sa potom vypočíta podľa vzorca

$$P_{k,n}=\binom{n}{k}u^k\left(1-u\right)^{n-k}.$$

Geometrická pravdepodobnosť

Geometrická pravdepodobnosť sa používa vtedy, keď množinou elementárnych javov Ω je nejaký geometrický útvar (úsečka, oblúk, štvorec, kruh, kocka,..), pre ktorý vieme vypočítať jeho mieru $m(\Omega)$ (dĺžku, obsah, objem).

Keď $A \subset \Omega$ je merateľná, t.j. má mieru $m(A)$ a pravdepodobnosť padnutia bodu do *A* je úmerná miere množiny *A* a nezávisí od polohy *A* v Ω, potom definujeme

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Nezávislosť náhodných javov

Hovoríme, že náhodné javy A a B sú nezávislé práve vtedy, keď pravdepodobnosť ich súčasného nastania je rovná súčinu ich pravdepodobností, teda keď

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Podmienená pravdepodobnosť

Nech A a B sú náhodné javy, pričom $P(B) > 0$. Podmienenou pravdepodobnosťou javu A za podmienky, že nastal jav B nazývame číslo

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Axiomatická definícia pravdepodobnostného priestoru

Axiomaticky definovaný pravdepodobnostný priestor má tri zložky:

• množinu elementárnych javov Ω,

• pole náhodných javov 🌢 - neprázdny systém podmnožín množiny Ω, spĺňajúci určité axiómy,

• pravdepodobnosť P – funkciu definovanú na poli náhodných javov 🌢, spĺňajúcu určité axiómy.

Ak Ω je konečná množina, tak 🌢 je algebra podmnožín množiny Ω, P je nezáporná, aditívna funkcia definovaná na 🌢, $P(\emptyset) = 0$.

Ak Ω je nekonečná množina, tak 🌢 je sigma-algebra podmnožín množiny Ω, P je nezáporná, sigma-aditívna funkcia definovaná na 🌢, $P(\emptyset) = 0$.

Stochastický model náhodného pokusu

Hod mincou, hod kockou, losovanie sektoru pomocou rulety sú reálne procesy.

Pravdepodobnosť je matematická disciplína a preto sa môže zaoberať len matematickými objektmi. V teórii pravdepodobnosti hovoríme o hode symetrickou mincou, o hode pravidelnou kockou, uvažujeme o losovaní pomocou ideálnej rulety a pod. Sú to tzv. *myšlienkové náhodné pokusy*.

I keď hracia kocka nie je pravidelná kocka, koleso šťastia nie je kruhom, šípka rulety nie je úsečkou, môžeme im priradiť myšlienkové náhodné pokusy tak, ako napr. k strane zošita priradíme geometrický obrazec obdĺžnik.

Vytvorený myšlienkový náhodný pokus, s množinou jeho výsledkov a ich pravdepodobnosťami sa nazýva stochastický model.

Proces stochastickej aplikácie

Pri riešení reálnych problémov potrebujeme prejsť z nematematickej situácie do sveta matematickej abstrakcie, čo sa nazýva ***fáza matematizácie*.** Fáza matematizácie spočíva v pretransformovaní nematematického problému do jazyka matematiky (v sformulovaní matematickej úlohy) a konštrukcii matematického modelu pre túto reálnu situáciu. Táto fáza má logický a kombinatorický charakter. Modelmi určitej situácie môžu byť dva rôzne, dokonca aj neizomorfné pravdepodobnostné priestory.

Druhou fázou je ***fáza dedukcie a procesu výpočtu***. V tejto fáze treba sformulovať potrebné tvrdenia ako náhodné javy, vypočítať ich pravdepodobnosť, overiť ich nezávislosť a pod.

Poslednou fázou pre ***fáza interpretácie*.** Riešenie nematematického problému matematickými prostriedkami musí končiť závermi, čo naše vypočítané výsledky znamenajú v reálnom živote, v praxi.

Stochastická gramotnosť spočíva práve v schopnosti robiť závery o vypočítaných výsledkoch.

Stochastické úlohy v škole

Stochastickými úlohami by mali byť úlohy, ktorých riešenie obsahuje všetky tri vyššie uvedené fázy.

- Má to byť úloha, v ktorej je zrejmé, kto, kedy a načo potrebuje takúto úlohu riešiť. Teda úloha by mala mať **reálny kontext**. Fáza matematizácie stochastickej úlohy **musí obsahovať tvorbu stochastického modelu.**
- Výpočet musí byť urobený v rámci tohto stochastického modelu.
- Nesmie chýbať interpretácia výsledkov.

Pojem pravdepodobnosti musí byť pochopený v rôznych aspektoch.

- **Štatistický aspekt** – ide o odhad pravdepodobnosti resp. šance relatívnou početnosťou s veľkého počtu získaných údajov.
- **Klasický aspekt** – výpočet pravdepodobnosti v rámci klasického pravdepodobnostného priestoru.
- **Aspekt miery a geometrický aspekt** – výpočet pravdepodobnosti ako podiel miery náhodného javu a miery priestoru elementárnych javov.
- **Axiomatický aspekt** – mal by uzatvárať (nie začínať) proces rozvoja stochastického myslenia.

Stupne rozvoja pravdepodobnostného myslenia

V súvislosti s rôznymi štádiami rozvoja stochastického myslenia u detí sa zvykne uvádzať Piagetova a Inhelderova práca

PIAGET, J; I, INHELDER, B., *The Origin of the Idea of Chance in children.* London: Routeldge and Kegan Paul, 1975.

Piaget tvrdil, že pojem „šanca“ sú deti schopné chápať od 7 rokov a rozlišoval tri štádia, resp. úrovne pravdepodobnostného myslenia, a to:
- Dozrievanie
- Proporcionálne uvažovanie
- Operačné myslenie

Fischbein v práci

FISHBEIN, E., *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel, 1975.

popisuje rozvoj pravdepodobnostného myslenia prostredníctvom pojmov primárnych a sekundárnych intuícií.

Primárne intuície sú popísané ako zvyšovanie vedomostnej úrovne na základe poznávania, kým **sekundárne intuície** sú formované prostredníctvom učenia a systematických inštrukcií.

Základný rozdiel medzi Piagetovou a Fischbeinovou teóriou je, že Fischbein argumentuje tým, že primárne intuície nie sú nahradené sekundárnymi intuíciami a môžu byť využité osobami v určitých situáciách.

Jennifer Way v práci

WAY, Jennifer. (2009) The Development of Children’s Reasoning. [Online]. http://www.merga.net.au/documents/RR_way.pdf

uvádza výsledky výskumu, ktorý sa uskutočnil v roku 2004 v Austrálii na troch školách zo 74 deťmi vo veku 4-12 rokov a to v čase, keď deti ešte neabsolvovali žiadnu výučbu z pravdepodobnosti. Štúdia teda skúma intuitívne chápanie pravdepodobnostných pojmov.

Boli identifikované tri štádia, v závislosti od veku, ale na rozdiel od predchádzajúcich výskumov, sa objavili aj dve prechodové štádiá s nasledovnými charakteristikami:

***Štádium 1*: „Nepravdepodobnostné myslenie“.**

Priemerný vek – 5 rokov 8 mesiacov, minimálne chápanie náhodnosti, spoliehanie sa na vizuálne porovnanie, neschopnosť porovnania pravdepodobností

***Štádium 2:* „Objavné pravdepodobnostné myslenie“.**

Priemerný vek 9 rokov 2 mesiace, rozlišovanie štruktúry výberového priestoru, usporiadanie pravdepodobnosti podľa vizuálneho porovnania alebo odhadu čísla, pojmy rovnaká pravdepodobnosť a nemožnosť

***Štádium 3*: „Kvantifikácia pravdepodobnosti“.**

Priemerný vek 11 rokov 3 mesiace, numerické porovnania, dvojnásobné a polovičné počty, proporcionálne myslenie, kvantifikácia objavenej pravdepodobnosti